1. Probematura 2026 Aufgabe 1A /4

Bei einem Fahrradergometer-Test wird der Sauerstoffverbrauch einer Person bei steigender Belastung gemessen. Mit höherer Geschwindigkeit steigen auch die Leistung (in Watt) und damit der verbrauchte Sauerstoff in Litern pro Sekunde. Bei einer Testperson werden folgende Sauerstoffwerte in Abhängigkeit von der am Ergometer angezeigten Leistung gemessen:

Leistung in Watt	Sauerstoffverbrauch in Litern pro Sekunde
50	0,8
100	1,5
150	2,2
200	3,0
250	3,6

a) Begründe, dass der Zusammenhang zwischen der erzielten Leistung und dem Sauerstoffverbrauch besser durch eine lineare Funktion als durch ein exponentielles Modell angenähert werden kann. 1 Punkt

Für konstante Veränderungen der Leistung **steigt der Sauerstoffverbrauch** stets **annähernd um den gleichen Wert**, aber **nicht um den gleichen Faktor**.

oder:

In gleichen Leistungsintervallen ist die **absolute Änderung** des Sauerstoffverbrauchs **annährend konstant**. Die **relative Änderung** des Sauerstoffverbrauchs **jedoch nicht**.

---

b) Der Zusammenhang zwischen der erbrachten Leistung in Watt und dem Sauerstoffverbrauch in Litern pro Sekunde soll durch eine lineare Funktion $s: [0; 300] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $s(l) = k \cdot l + d \quad (k, d \in \mathbb{R})$ modelliert werden.

Bestimme die Parameter k und d so, dass die Funktion s die gemessenen Werte möglichst gut abbildet. 1 Punkt

$k = 0{,}014$

$d = 0{,}1$

c) Bei einer zweiten Testperson wird der Zusammenhang zwischen Leistung l (in Watt) und Sauerstoffverbrauch $s_1(l)$ (in Liter/s) durch die Funktion $s_1\colon [0; 300] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $s_1(l) = 0{,}0001 \cdot l^2 + 0{,}0021 \cdot l + 0{,}5$ modelliert.

1) Interpretiere den Wert $0{,}5$ im gegebenen Kontext.

2) Bestimme jene Leistung in Watt, ab der der Sauerstoffverbrauch größer als 3 Liter/s ist. 1 Punkt

$1)$

Im Ruhezustand, also bei einer Leistung von 0 Watt, beträgt der Sauerstoffverbrauch $0{,}5$ Liter/s.

2) Ab einer Leistung von rund $[147; 150]$ Watt ist der Sauerstoffverbrauch höher als 3 $Liter/s$.

---

d) Das bewegte Luftvolumen beim Ein- und Ausatmen im Ruhezustand und in Belastungsphasen wird durch unterschiedliche Funktionen annähernd beschrieben.

Im Ruhezustand wird das bewegte Luftvolumen $v(t)$ (in Liter/s) zum Zeitpunkt t (in Sekunden) durch die Funktion $v\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ beschrieben:

$$v(t) = 0{,}5 \cdot \sin(0{,}4 \cdot \pi \cdot t)$$

Während einer körperlichen Belastung verändern sich die Atemzüge: Sie erfolgen tiefer und in kürzeren zeitlichen Abständen. Dieses veränderte Luftvolumen $b(t)$ wird durch die Funktion $b\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ modelliert:

$$b(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$$

Kreuze die beiden Aussagen an, die die Parameter a und b im Vergleich zum Ruhezustand korrekt beschreiben. [2 aus 5] 1 Punkt

$b < 0{,}4 \cdot \pi$	☐
$a > 0{,}5$	☑
$b > 0{,}4 \cdot \pi$	☑
$a = 0{,}5$	☐
$a < 0{,}5$	☐

Um die Einhaltung der Geschwindigkeitsbegrenzung zu kontrollieren, werden an manchen Straßenabschnitten "Section-Control"-Einheiten angebracht. Hierbei werden die Zeitpunkte festgehalten, zu denen ein Fahrzeug den Startpunkt sowie den Endpunkt eines gewissen Streckenabschnittes passiert. Da somit bekannt ist, wie lange das Auto für eine bestimmte Strecke benötigte, kann die Durchschnittsgeschwindigkeit ermittelt werden.

Bei einer bestimmten Section-Control auf der A22 ist der Streckenabschnitt zwischen den beiden Messzeitpunkten $2\,300$ m lang. Die erlaubte Höchstgeschwindigkeit beträgt 80 km/h.

a) Ein PKW passiert den ersten Kontrollpunkt um $08:15:00$ Uhr und den zweiten um $08:16:30$ Uhr.

Berechne, um wie viel Prozent die Durchschnittsgeschwindigkeit des PKW die erlaubte Höchstgeschwindigkeit überschreitet. 1 Punkt

Die Geschwindigkeit des PKWs weicht um **15** Prozent von der erlaubten Höchstgeschwindigkeit ab.

---

b) Die momentane Geschwindigkeit $v_1(t)$ (in m/s) eines anderen Fahrzeugs kann für $t \in [0; 200]$ durch eine Funktion beschrieben werden. Für einen Zeitpunkt t_0 während der Fahrt durch den Abschnitt gilt:

$$v_1(t_0) > 23\text{m/s}$$

Interpretiere die obige Bedingung im gegebenen Kontext und begründe, warum allein aus dieser Information **nicht** auf eine Geschwindigkeitsübertretung im Sinne der "Section-Control" geschlossen werden kann. 1 Punkt

Es gibt einen Zeitpunkt t_0 an dem die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h ≈ 23 m/s überschritten wurde. Gibt es genügend weitere Zeitpunkte,an denen die Höchstgeschwindigkeit nicht überschritten bzw. unterschritten wird, so kann die Durchschnittsgeschwindigkeit immer noch unter den zugelassenen 80 km/h liegen und eine Strafe ist nicht zu befürchten.

---

c) Die momentane Geschwindigkeit $v_2(t)$ (in m/s) eines Motorrads t Sekunden nach Durchqueren des ersten Kontrollpunktes kann annähernd durch die Funktion $v_2\colon [0; 150] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

Kreuze die zutreffende Bedeutung von x in der folgenden Gleichung an. [1 aus 5]

$\int_0^x v_2(t)\,dt = 2\,300$ 1 Punkt

x gibt die momentane Beschleunigung beim zweiten Kontrollpunkt der Section Control an	☐
x gibt die Länge des zurückgelegten Weges zwischen dem ersten und dem zweiten Kontrollpunkt an	☐
x gibt die momentane Geschwindigkeit beim zweiten Kontrollpunkt der Section Control an	☐
x gibt die benötigte Zeit für das Durchqueren der Section Control an	☑
x gibt die Länge des Weges an, der bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit zurückgelegt wurde	☐

d) Erfahrungsgemäß fahren $0{,}2\ \%$ aller Fahrzeuge zu schnell. Ein zu schnell fahrendes Fahrzeug wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $99{,}5\ \%$ vom System korrekt erfasst. An einem Tag passieren $35\,500$ Fahrzeuge die Anlage.

Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der Fahrzeuge, die an diesem Tag vom System als "zu schnell fahrend" erfasst werden. 1 Punkt

Erwartungsgemäß löst der Blitzer bei rund $[\mathbf{70}; \mathbf{71}]$ Fahrzeugen aus.

e) Bei einer allgemeinen Verkehrskontrolle ist bekannt, dass $3\ \%$ aller Fahrzeuge kein Pannendreieck mitführen.

Berechne, wie viele Fahrzeuge mindestens kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\ \%$ mindestens ein Fahrzeug ohne Pannendreieck entdeckt wird. 1 Punkt

Es müssen mindestens **99** Fahrzeuge überprüft werden.

Ein Containerschiff ist ein großes Frachtschiff, das speziell dafür gebaut wurde, standardisierte Container zu transportieren. Diese Container können verschiedene Güter enthalten und lassen sich leicht zwischen Schiff, Zug und Lkw umladen. Containerschiffe sind ein zentraler Bestandteil des weltweiten Handels und ermöglichen den effizienten Transport großer Warenmengen über Ozeane.

a) Die Ladungskapazität von Containerschiffen wird in der Einheit TEU angegeben und entspricht der Anzahl von 20-Fuß-Containern, die das Schiff transportieren kann. Ein 20-Fuß-Container hat eine Länge von 6,06 m, eine Breite von 2,44 m und ist 2,59 m hoch. Das Innenvolumen eines Containers beträgt 33,1 m^3. 2 Punkte

1) Weise rechnerisch nach, dass das Innenvolumen kleiner als das Außenvolumen ist.

Das Außenvolumen beträgt $6{,}06 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59$
$\approx 38{,}30 m^3$, das Innenvolumen ist jedoch mit $33{,}1 m^3$ angegeben.

Das Innenvolumen lässt sich durch die Wandstärke x (in m) aller sechs Seiten erklären.

2) Stelle eine Gleichung zur Berechnung von x auf und berechne die Wandstärke.

Gleichung: $(6{,}06 - 2 \cdot x)(2{,}44 - 2 \cdot x)(2{,}59 - 2 \cdot x) = 33{,}1$

$x = [0{,}07; 0{,}08]\ m$.

---

b) Die Beladung der Schiffe erfolgt teilweise über einen Kran, bei kleineren Containern über eine Rampe. Um eine sichere Beladung zu gewährleisten, darf die Steigung der Rampe nicht größer als s % sein. Der Höhenunterschied zwischen den beiden Auflagepunkten der Rampe beträgt hm. 1 Punkt

1) Stelle eine Ungleichung für die Horizontalentfernung x auf, die eine sichere Beladung garantiert.

Ungleichung: $\frac{h}{x} \leq \frac{s}{100}$

2) Berechne die erforderliche Mindestlänge der Rampe für $s = 18\ \%$ und $h = 15\ m$.
Die Rampe muss mindestens $[84; 85]\ m$ lang sein.

---

c) Containerschiffe können im Normalfall Geschwindigkeiten zwischen 16 und 24 kn (Knoten) erreichen, was etwa 29,6 bis 44,4 km/h entspricht. 1 Punkt

1) Begründe, dass zwischen der Geschwindigkeit in kn und jener in km/h ein direkt proportionaler Zusammenhang besteht.

Wird die Geschwindigkeit in Knoten um den Faktor 1,5 (von 16 auf 24 kn) erhöht, so steigt auch die Geschwindigkeit in km/h um den Faktor 1,5 (von 29,6 auf 44,4km/h).

2) Stelle eine Formel für die Umwandlung einer Geschwindigkeit a in kn in eine Geschwindigkeit b in km/h auf.

$b = a \cdot 1{,}85$

---

d) Die beiden Häfen Felixstowe in London und der Rotterdamer Hafen in den Niederlanden sind rund 230 km voneinander entfernt.

Schiff A fährt um $6{:}30$ Uhr aus Felixstowe ab und erreicht eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 32 km/h.
Schiff B fährt eine halbe Stunde später aus Rotterdam los und erreicht eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h.
Es wird angenommen, dass beide Schiffe annähernd geradlinig entlang derselben Strecke fahren.

Um einen Zusammenstoß zu vermeiden, muss Schiff A rechtzeitig ausweichen. Für dieses Ausweichmanöver werden 10 Minuten eingeplant.

Gib an, um welche Uhrzeit und nach welcher Entfernung vom Abfahrtsort Schiff A mit dem Ausweichmanöver beginnen muss. Runde auf ganze Minuten und Kilometer. 1 Punkt

Schiff A muss um $\mathbf{9:48}$ Uhr mit dem Ausweichmanöver starten. Es ist dann $\mathbf{105{,}78}\ \boldsymbol{km}$ vom Felixstower Hafen entfernt.

Die App "Math-Master" ist eine Lern-App, die Schüler:innen bei der Vorbereitung auf die Mathematik-Matura unterstützen soll. Für die ersten fünf Monate nach Veröffentlichung der App entwickelt sich die Nutzer:innen-Zahl annähernd exponentiell. Nach 14 Tagen ist die Anzahl der registrierten Nutzer:innen bereits um 36% gestiegen.

a) Bestimme die tägliche durchschnittliche prozentuelle Zunahme der Anzahl der Nutzer:innen von "Math-Master". 1 Punkt

Die Anzahl der Nutzer:innen steigt täglich um rund $[2{,}0; 2{,}3]$%.

---

b) "Study Buddy" ist eine andere Lern-App die am selben Tag wie "Math-Master" veröffentlicht wurde. Sie verzeichnet einen täglichen durchschnittlichen Zuwachs von 1,3 Nutzer:innen. Beide Apps starteten mit 10 registrierten Nutzer:innen.

Ermittle nach wie vielen Tagen beide Plattformen dieselbe Anzahl an registrierten Nutzer:innen aufweisen und berechne diese. 1 Punkt

Nach $[132; 133]$ Tagen sind bei beiden Lernapps $[181; 182]$ Nutzer:innen registriert.

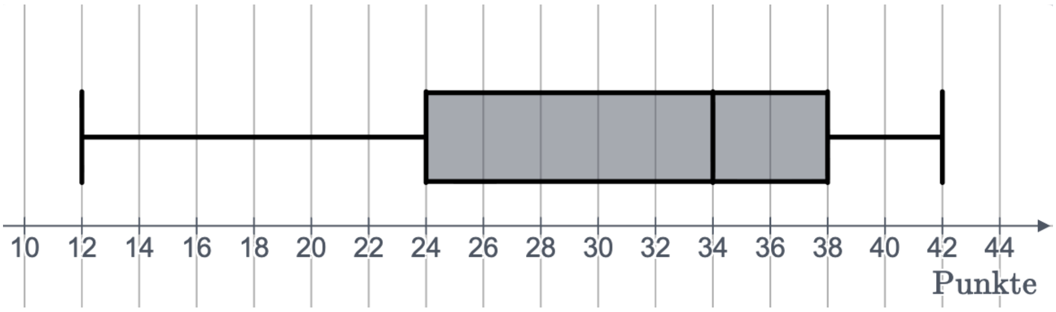
---

c) Eine Schülerin absolviert fünf Kompetenzchecks mit jeweils maximal 20 Punkten. Ihr bisheriger Mittelwert liegt bei $\bar{x}_5 = 13{,}2$ Punkten. Sie führt zwei weitere Checks durch, bei denen sie x_1 und x_2 Punkte erreicht. Dadurch steigt ihr Gesamtdurchschnitt auf genau 14 Punkte.

Kreuze diejenige Gleichung an, welche die Bedingung für die Punktewerte x_1 und x_2 korrekt beschreibt! [1 aus 5] 1 Punkt

$\frac{x_1 + x_2}{5} = 13{,}2$	☐
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 14$	☐
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 13{,}2$	☐
$\frac{x_1 + x_2}{7} = 16$	☐
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 16$	☑

d) Nach der Mathematura veranschaulicht eine Mathelehrerin die Ergebnisse aller drei achten Klassen in folgendem Kastenschaubild:



Ergänze die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht.

__(1)__ aller Schüler:innen haben __(2)__ Punkte bei der Mathematura erzielt. 1 Punkt

(1)	
mindestens 75%	☐
mindestens 25%	☐
höchstens 75%	☑

(2)	
weniger als 24	☐
weniger als 34	☑
mehr als 38	☐

---

e) In der 8B haben sieben Schüler:innen ausschließlich mit einer Lernapp gelernt, zwölf Schüler:innen sowohl mit Büchern als auch mit einer Lernapp und drei Schüler:innen nur mit Büchern für ihre Matura gelernt. Eine Lehrkraft bittet drei zufällig ausgewählte Schüler:innen, ihre Erfahrung beim Lernen an die 7. Klässler:innen weiterzugeben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei ausgewählten Personen jede der drei Lernmethoden genau einmal vertreten ist. 1 Punkt

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\mathbf{[16; 16{,}2]}$%

Ein Unternehmen produziert und verkauft Maschinen, die in der Weiterverarbeitung von Pfandflaschen benötigt werden. Pro produzierter ME (Mengeneinheit) x fallen Kosten von $K(x)$ GE (Geldeinheiten) an.

a) Die Kostenfunktion K ist eine Polynomfunktion dritten Grades der Form $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Über den Produktionsprozess sind folgende Informationen bekannt:

- Die Fixkosten belaufen sich auf 120 GE.
- Bei einer Produktion von 12 ME weist der Graph der Kostenfunktion eine Sattelstelle auf.
- Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 300 GE/ME.

1) Gib den Funktionsterm $K(x)$ an.

2) Berechne das Betriebsoptimum für dieses Unternehmen. 2 Punkte

$$K(x) = \frac{25}{16} \cdot x^3 - \frac{225}{4} \cdot x^2 + 675 \cdot x + 120$$

$$x_{opt} = [18; 18.5]$$

---

b) Die Maschinen werden zu einem Preis von 210 GE/ME verkauft.

1) Stelle die Erlösfunktion E auf.

2) Erläutere allgemein, wie sich eine Erhöhung des Verkaufspreises auf die Lage der Gewinngrenzen auswirkt. 1 Punkt

1) $E(x) = 210x$

2) Wird der Verkaufspreis erhöht, so wird der Gewinnbereich größer.

---

c) Ein kritisches Bauteil der Maschine muss eine Länge von 12 cm aufweisen. Aufgrund von Produktionsschwankungen ist die tatsächliche Länge X normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ cm. Ein Bauteil gilt als Ausschuss, wenn es mehr als $\pm 0{,}3$ cm vom Sollwert abweicht.

Um die Qualität zu sichern, darf der Anteil der Ausschussware höchstens 5 % betragen.

Bestimme die maximal zulässige Standardabweichung σ für diesen Produktionsprozess. 1 Punkt

Die Standardabweichung σ darf höchstens $[0.15; 0.154]$cm betragen.

d) Die Länge eines weiteren Bauteils ist ebenso normalverteilt mit den Parametern $\mu = 32$ mm und $\sigma = 0{,}8$mm. Durch eine Justierung der Maschinen verändert sich die Verteilung. Der Graph der neuen Dichtefunktion ist im Vergleich zum ursprünglichen Graphen flacher und nach rechts verschoben,

Kreuze an, welche Werte für μ_1 und σ_1 diese Bedingung erfüllen. [1 aus 5] 1 Punkt

$\mu = 34$ mm und $\sigma = 1{,}0$ mm	☑
$\mu = 32$ mm und $\sigma = 0{,}5$ mm	☐
$\mu = 33{,}5$ mm und $\sigma = 0{,}6$ mm	☐
$\mu = 31$ mm und $\sigma = 0{,}7$ mm	☐
$\mu = 30$ mm und $\sigma = 1{,}1$ mm	☐